SEMIGROUP における CONGRUENCE (by Mario・Petrich) についての考察 (1)

江　口　俊　男

(昭和42年9月30日受理)

ON THE CONGRUENCES (by Mario Petrich) OF SEMIGROUPS (1)

By

Toshio Eguchi

semigroup の ideal extension については，Clifford, Yoshida によって研究されているが，また，Mario, Petrich によって，semigroup における congruence についての結果が報告されている。ここでは，Vを semigroup, SをVの ideal, TをV/Sに isomorphic な semigroup, $V \ni \nu$, $S \ni \sigma$, $T \ni \tau$ に対して，$\nu|s$ が weakly reductive であるようなVの congruence ν について考察する。

1. Vをoをもつ semigroup T による semigroup S の拡大とする。$\sigma \in C(S)$, Pを T のイデヤルで，任意の $A \in P^*$ に対して，次のような $a \in S$ が存在するとする。

(1) $Ax\sigma ax$, $xA\sigma xa$ $(x \in S)$

若しAとaが条件(1)を満足するならば，それらを，"σ—link" と呼ぶ。$\tau \in C$ (T/P) で O—restrict で且つ，

(2) $Ax\sigma By$, $xA\sigma yB$ もし $A\tau B$, $x\sigma y$ ならば。$(A, B \in T\backslash P, x, y \in S)$

Vにおける関係νを次のように定義する。

$A, B \in T\backslash P : A\nu B \rightleftarrows A\tau B;$

$A, B \in P^* : A\nu B \rightleftarrows A, B$ に対して σ—link な，即ち，$a\sigma b$ なる $a, b \in S$ が存在する。

$A \in P^*$, $b \in S$: $A\nu b \rightleftarrows b\nu A \rightleftarrows A$ σ—linkなる，即ち，$a\sigma b$なるSの元aがあり：$a\nu b \rightleftarrows a\sigma b$.

かゝるνを，$\nu=(\sigma, P, \tau)$ とかく。

補題 1,

Vにおける congruence は (σ, P, τ) の形である。

証明

$\mu \in C(V)$; $P=\{A \in T^* \mid A\mu a, a \in S\} \cup O.$

このときPはTのイデヤルである。$\sigma=\mu \mid s$ とし，T/P におけるτを

$A\tau B \rightleftarrows A\mu B$ (A, $B\in T\backslash P$) ; OrO.

で定義する。明らかに，$\sigma\in C(S), \tau\in C(T/P)$ で，O—restrict で，(1), (2)が成り立ち，$\mu=(\sigma, P, \tau)$ である。

定理 1，

σが Sに於て，weakly reductive congruence ならば，$\nu=(\sigma, P, \tau)$ は，$\nu \mid s$ が weakly reductiv であるような，Vにおける equivalence である。

証明

$\nu=(\sigma, P, \tau)$, σは weakly reductive とする。νがVの equivalence であることを示すためには，$A\nu a$, $A\nu b$ が $a\nu b$, 即ち $a\sigma b$ を含むことをいえばよい。若し，$A\nu a$, $A\nu b$ ならば(1)によって

$$ax b x,\quad x a\sigma x b\quad (x\in S),$$

を得る。σから $a\sigma b$ は weakly reductive である。ν が右 congrnence であることを明らかにする。左についても同様である。

第一. A, $B\in T\backslash P$, $A\nu B$, $C\in V$ の場合，

このときは，若し，$AC\in T\backslash P$, $BC\in T\backslash P$ ならばτから $A\tau B$ は O—restrict である。従って，$AC\tau BC$, 即ち，$AC\nu BC$ である。

$AC\in P^* \cup S$ と仮定すると $BC\in P^* \cup S$ は O—restrict である。そこで次のいくつかの場合に別ける。

a) AC, $BC\in P^*$ の場合。

このとき，a, $b\in S$ に対して，$AC\nu a$, $BC\nu b$ は

(3) $ACx\sigma ax$, $BCx\sigma bx$ $(x\in S)$

(4) $xAC\sigma xa$, $xBC\sigma xb$ $(x\in S)$

である。(2)によって $A\tau B$ は $A(Cx)\sigma B(Cx)$ を含み，(3)により $ax\sigma bx$ を含む。更に(2)によって，$xA\sigma xB$ を，それは再び(2)によって，$(xA)C\sigma(xB)C$ を，(4)によって $xa\sigma xb$ を含む。これはすべての $x\in S$ に対して成立ち，σは Weakly reductive であるから，$a\sigma b$ 従って $AC\nu BC$ をうる。

b) $AC\in S$, $BC\in P^*$ の場合。

このとき $A\tau B$ は任意の $x\in S$ に対して，$xA\sigma xB$ を，(2)によって $x(AC)\sigma x(BC)$ を含む。更に，(2)によって，$A(Cx)\sigma B(Cx)$ を 含む。$BC\in P^*$ であるから，ある $b\ni S$ に対して，$BC\nu b$。従ってすべての $x\in S$ に対して $x(BC)\sigma xb$, $(BC)x\sigma bx$ であり，

$$x(AC)\sigma xb,\quad (AC)x\sigma bx\quad (x\in S)$$

然し，σは weakly rednctive であるから $AC\sigma b$; かくて $AC\nu BC$ をうる。

c) $AC\in P^*$, $BC\in S$ とAC, $BC\in S$ は同様にして示される。

第二. $A, B \in P^*$, $A\nu B$, $C \in V$. このときは，$a \in S$ に対して $A\nu a$, $B\nu a$ である。(1)によって $a \in S$ に対して $A(Cx)\sigma a(Cx)$ と $xA\sigma xa$ をうる。(2)を $xA\sigma xa$ に適用して，$(xA)C\sigma(xa)C$ をうる。Aの代りにBを同様に用いて

(5) $ACx\sigma aCx$, $BCx\sigma aCx$ $(x \in S)$

(6) $xAC\sigma xaC$, $xBC\sigma xaC$ $(x \in S)$

更に次の場合に別けて考える。

a) $AC, BC \in P^*$. このときは或る $b, c \in S$ に対して $AC\nu b$, $BC\nu c$. (5)と(6)によって，すべての $x \in S$ に対して，$bx\sigma cx$ と $xb\sigma xc$ をそれぞれ得ることができる。然し，$b\sigma c$ $(AC\nu BC)$ である。

b) $AC \in S$, $BC \in P^*$. このときある $b \in S$ に対して $BC\nu b$. (5)と(6)によって，すべての $x \in S$ に対して，$ACx\sigma bx$ と $xAC\sigma xb$ をうる。然し，$AC\sigma b$ $(AC\nu BC)$ である。

c) $AC \in P^*$, $BC \in S$ と $AC, BC \in S$ の場合は同様に考えられる。

その他の場合のすべての証明は，上と同様にして得られる。かくて $\nu \in C(V)$. $\nu|s=\sigma$ から，$\nu|s$ は weakly reductive である。

系1

σが weakly reductive であるとき，μが (σ, P, τ) の形であるようなμは，Vにおける congrueuce である。

系2

Sにおけるすべての congruence が weakly reductive であるとき，V におけるすべての congruence の集合は，(σ, P, τ) の形の関係の集合と一致する。

系2のSの条件が満足されるとき，Sの各元は左または右 identity をもつ。この場合，任意の $\sigma \in C(S)$に対して，S/σ は同じ性質をもち，S/σ は weakly reductive である。特に regular semigroup は系2の条件を満足する。いまSを，$S^2 \neq S$ なる semigroup とする。若しσをSにおける equivalence の1つとし，その class は S^2 を含むとする。このとき，S/σ は zero-semigroup で，σは，σが一般的関係でない限り weakly reductiveではない。$S^2 \neq S$ で weakly reductive 半群 Sの例として，$S=\{a, b, c, d, e\}$ とおき，その乗積表が次の表で示される様な semigroup が考えられる。

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	a
d	a	a	b	a	a
e	a	b	a	d	e

若し，PがTのイデヤル $(\neq O)$ で $P^* \cup S$ がSの狭義の拡張であるならば，Pは (σ, P, τ) で用いられる。この場合すべての $A \in P^*$ に対して，$x \in A : Ax=ax$, $xA=xa$ であるような $a \in S$ が存在する。結合が，Vに於て partial homomorphism で与えられるときは，次の結果が得られる。

補題2.

Vを partial homomorphism ω で定められた T による S の拡張であるとする。$\omega: T^* \to S\sigma$。σをSの weakly reductive congruence, PをTの任意のイデヤルとする。このとき $\nu=(\sigma, P, \tau)$ がVに於ける congruence であるような $a\tau \in C(T/P)$ が存在する。更に, σ, τ について, (2)の条件は次と同値である。

(7) $A\omega\sigma B\omega$ if $A\tau B$ $(A, B \in T \backslash P)$

証明.

前半は補題でのべた注意から得られる。いま, σを weakly reductive とする。若し, (2)が成立し, 且, $A\tau B$ であるならば, すべての $x \in S$ に対して, $Ax\sigma Bx$, $xA\sigma xB$ で $(A\omega)x\tau(B\omega)x$, $x(A\omega)\tau x(B\omega)$ がωの性質から導かれる。故に, $A\omega\sigma B\omega$ は weakly reductive で, 従って(7)が成立する。若し, (7)が成り立てば $A\tau B$, $x\sigma y$ は $A\omega\sigma B\omega$ を含み, $(A\omega)x\sigma(B\omega)y$, 従って $Ax\sigma By$ である。

系.

若し, VがSとTの orthogonal sum (即ち, $xA=Ax=O$, $x \in S$, $A \in T^*$) ならば, (1), (2)は任意の σ, P, τ に対して満足される。

証明.

この場合は, ωは $T^* \to O$ で示され, 従って $A\omega=B\omega=O$, A, $B \in T^*$ となり(2)が成立する。条件(1)は補題から成立する。

若しTがOでない proper ideal をもたないならば (即ち, TがO—simple か order—2の0—半群である) PはOまたはTであらねばならない。従って若し, $\nu \in C(V)$ ならば, Sはν或は intersect T^* のすべての class ν によって saturat される。この場合には(1)と(2)はそれぞれ不要となる。

REFERENCES

MARIO. PETRICH, Congruences on Extensions of Semigroups, Duke. J. Math., Vol. 34, No, 2(1967), pp 215—223.